Angemessene Grundvorstellung zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht

Petra HAUER-TYPPELT, Universität Wien

Zusammenfassung:

Für Themenbereiche, die länger als die Stochastik im Schulunterricht verankert sind, ist es etabliert: Zentrale Begriffe werden dem Spiralprinzip folgend im Laufe des Lernprozesses immer wieder aufgegriffen und in den verschiedenen Jahrgangsstufen auf unterschiedlichen Niveaus behandelt, um angemessene Grundvorstellungen zu entwickeln.
Der Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (erst) in der 6. Klasse AHS gibt der Einführung der essentiellen Begriffe „Wahrscheinlichkeit" und „Zufall" oft wenig Raum, gleicht eher einem Sprung ins kalte Wasser, dessen Folgen sich später, sei es bei der Interpretation von Ergebnissen oder beim Verstehen von Ideen und Methoden der Stochastik, als Mangelerscheinungen entpuppen (können). Im Folgenden werden Möglichkeiten vorgestellt, stochastische Grundbegriffe aus unterschiedlicher Sichtweise, mit verschiedenen Vorstellungen verbunden, zu entwickeln, nicht zuletzt um stochastische Situationen auch im realen Leben erkennen und beurteilen zu können.

1. Grundvorstellung – wozu?

Am Anfang eines solchen Aufsatzes muss wohl die Frage stehen, was wir mit dem schulischen Stochastikunterricht prinzipiell erreichen wollen?
Die innermathematische Antwort ist so eindeutig wie einfach: Stochastik als essentielles Teilgebiet der Mathematik ist aus einer fundierten mathematischen Grundausbildung nicht wegzudenken. Insbesondere geht es dabei natürlich auch darum, unsere Schüler/innen auf zukünftige Ausbildungen vorzubereiten. Statistik aber auch Wahrscheinlichkeitsrechnung spielen ja in vielen Fachgebieten eine wesentliche oder gar zentrale Rolle.
Da ist aber auch der darüber hinausgehende Anspruch, unabhängig von nachfolgenden Ausbildungsschienen, Schülerinnen und Schüler für Situationen des Berufs- oder Alltagslebens zu rüsten, in denen stochastisches Denken erforderlich ist. Damit sind Situationen gemeint, in denen Beurteilen und Entscheiden unter Unsicherheit erforderlich ist.
Typische Beispiele dazu sind:

- Die Aussagekraft von Wahlprognosen oder auch Hochrechnungen soll richtig eingeschätzt werden können.
- Berichte über statistische Erhebungen und deren Ergebnisse, insbesondere auch in Medien, sollen richtig gedeutet und eingeordnet werden können, wie beispielsweise die folgende Meldung unter dem Titel „Schlaflos in Österreich" aus der Tageszeitung „Die Presse" vom 16.3.2009:
  „In einer aktuellen Untersuchung dazu zeigten 47 Prozent der Probanden bereits nach drei Wochen eine *signifikante* Besserung sowohl der Schlafqualität als auch der morgendlichen Wachheit."
- Alltägliche Meldungen in Medien wie
  „Die Wahrscheinlichkeit, dass es in Wien im November mehr als 5 nebelfreie Tage gibt, ist 60 %"
  sollen richtig gedeutet werden können.
- Der Stochastikunterricht soll auch befähigen, mit (eigenen) positiven medizinischen Testergebnissen, die auf eine Infektion oder Krankheit hindeuten aber nicht mit Sicherheit feststellen, rational umgehen zu können. Genaue Ausführungen zu dieser Thematik finden sich in z. B. in Hauer-Typpelt (2007).

Essentiell dabei ist, den stochastischen Charakter einer Situation überhaupt erkennen zu können, erst dann kann eine Verbindung zwischen gelernten stochastischen Ideen und Inhalten und der vorliegenden Situation gelingen. Das Vorhandensein von angemessenen Grundvorstellungen ist dazu unentbehrlich.

Auch im Unterricht selbst sind diese gut entwickelten Grundvorstellungen unabdingbar, um beim Erarbeiten weiterer stochastischer Inhalte nicht zu scheitern.
Ein Beispiel einer konkreten Unterrichtssituation aus dem Stochastikunterricht der 8. Klasse AHS soll das verdeutlichen:

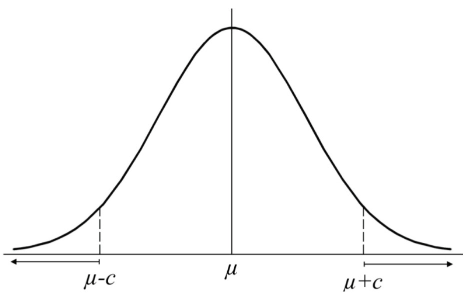

Abbildung 1:
Festlegung des Ablehnungsbereichs beim Testen von Hypothesen

Die aus gängigen Schulbüchern vertraute Abbildung (siehe z. B. Götz, 2007, S. 153) wird im Rahmen des Themenbereichs Testen von Hypothesen im Unterricht häufig verwendet, um die Idee zur Festlegung des Ablehnungsbereiches der Hypothese zu visualisieren. Unterrichtserfahrungen zeigen, dass die Schwierigkeiten selten im Erfassen der neuen kalkülorientierten Teile liegen, in denen es um die Ermittlung der Zahlenwerte von $\mu + c$ und $\mu - c$ geht. Vielmehr treten Probleme im Erfassen der grundsätzlichen Idee auf, die sich aus Defiziten im Verständnis von grundlegenden Begriffen wie Wahrscheinlichkeit, Zufall und Erwartungswert erklären. Verbinden die Lernenden beispielsweise mit „Wahrscheinlichkeit“ ausschließlich den Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff, muss es zwangsläufig bei der Einführung des Begriffs der „Irrtumswahrscheinlichkeit“ zu Schwierigkeiten kommen.
Ebenso muss der Erklärungsansatz „ein Stichprobenergebnis liege *zufällig* im Ablehnungsbereich der Hypothese“ scheitern, liegt kein adäquates Verständnis zum Konzept „Zufall“ vor. Aber auch die Notwendigkeit eines fundierten Verständnisses des Begriffs „Erwartungswert“ darf hier nicht unterschätzt werden. Wie sonst soll die im wahrsten Sinn des Wortes zentrale Rolle von μ bei der Festlegung des Intervalls $[\mu - c, \mu + c]$ erfasst werden?
Begriffe, mit denen Schüler/innen scheinbar längst vertraut sind, können im fortgeschrittenen Stochastikunterricht zum Scheitern führen, wenn sie im vorangegangenen Unterricht nur in einseitiger Sichtweise vermittelt und verwendet wurden. Denn ist diese Sichtweise im neuen Kontext nicht passend, kann eine Erklärung mit einseitig besetzten Begriffen keinen Beitrag zum Verständnis liefern.

Basierend auf diesen Überlegungen lassen sich auch die Schwierigkeiten beim Interpretieren der Ergebnisse der kalkülhaften Teile des Hypothesentestens erklären. Die Konstante c zu bestimmen, bekommt man rein methodisch ohne jegliches Verständnis hin. Lernende können sich also durchaus, zwar mit der nicht verstandenen Grundidee belastet, wieder ins Geschehen einschalten und die kalkülhaften Teile des Hypothesentestens bewältigen. Kein Wunder allerdings, wenn sie in weiterer Folge auch nur diese, sicherlich am wenigsten wesentlichen Teile der Aufgabenstellungen, erfolgreich bewältigen können.

Wir brauchen also angemessene Grundvorstellungen einerseits als Basis für das Erlernen stochastischer Methoden und Konzepte andererseits aber vor allem auch als Voraussetzung, um stochastische Situationen außerhalb des Mathematikunterrichts tatsächlich wiederzuerkennen und in Folge auch beurteilen zu können. Das muss im Unterricht durchgehend berücksichtigt werden und sich in der Zuteilung von Zeit und Vermittlung von Wertigkeit niederschlagen. Borneleit et al. halten das in ihrer „Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe“ als Richtlinie fest: „Zum Aufbau von Grundvorstellungen ist es notwendig, dass bewusst die kalkülorientierten Teile im Zeitaufwand und Wertigkeit zu Gunsten der inhaltlich orientierten Teile reduziert werden." (Borneleit et al., 2001, S. 81)

Gerade wenn Begriffe auch durch den Gebrauch in der Alltagssprache besetzt sind, wie es bei „Zufall" und „Wahrscheinlichkeit" der Fall ist, bedarf es einer besonderen Entwicklung im Unterricht. Denn Primärintuition, also die unmittelbare Einschätzung einer Sache, speist sich aus diesem alltäglichen Gebrauch der Begriffe und steht, wenn sie unpassend ist, klarerweise einem erfolgreichen Lernprozess im Wege.

Als Protobeispiel dafür sei das bekannte Lottospiel 6 aus 45 genannt: Der Tipp 1,2,3,4,5,6 wird von der überwiegenden Mehrheit, auch der regelmäßig Lotto spielenden Personen, abgelehnt, weil „das so sicher nie kommt.", Die Einsicht, dass dieser Tipp sich nur durch die einfache Erkennbarkeit seines Zahlenmusters nicht aber durch die Wahrscheinlichkeit, mit der diese Zahlen gezogen werden, von allen anderen unterscheidet, bleibt selbst nach einer ausführlichen Auseinandersetzung mit der Sache intuitiv schwer zu erfassen. Kommentare von Lernenden wie „Aber so ein schönes Muster hatten die Gewinnzahlen noch nie, daher würde ich trotzdem eher jeden anderen Tipp als diesen abgeben." unterstreichen das. Umso wichtiger also, viele solcher Situationen, möglichst frühzeitig im Lernprozess aufzugreifen, um unpassende Primärintuitionen im Laufe des Lernprozesses durch angemessenen Sekundärintuitionen abzulösen.

Tietze et al. formulieren dazu: „Der Stochastikunterricht in der Sekundarstufe II muss auf einer sicheren intuitiven Grundlage aufbauen. Diese Grundlage sollte unbedingt in der Primar- und Sekundarstufe I gelegt werden." (Tietze et al., 2002, S. 170) Nun steht diese Forderung, was die Primarstufe betrifft, im Widerspruch zum österreichischen Lehrplan, der in der Grundschule keinen Stochastikunterricht vorsieht. Daher gilt es umso mehr, den Raum, den der Lehrplan in der Sekundarstufe I dafür bietet, zu nutzen. In welcher Form das geschehen kann, wollen die folgenden Ausführungen zeigen.

2. Der Begriff Zufall

Die Besonderheit des Begriffs *Zufall* im Mathematikunterricht macht wohl aus, dass es keine Begriffsdefinition im üblichen Sinn gibt.

Piaget und Inhelder führten bereits 1975 als eine der ersten eine Untersuchung zur Entwicklung des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffs bei Vier- bis Zwölfjährigen durch und kamen zu der Auffassung, dass sich intuitive Vorstellungen zum Zufall schon herausbilden, bevor formal damit operiert wird. Einen kurzen aber aussagekräftigen Einblick in diese Untersuchung bieten Tietze et al. (2002), S. 147 ff. Ebendort findet sich eine Zusammenstellung von Zugängen zum Konzept Zufall in der wissenschaftlichen Literatur, die zum Vorschlag führt, ein Ereignis dann als zufällig bezeichnen, wenn es eintreten kann, aber nicht eintreten muss. Diese Festlegung kann den Aufbau eines tragfähigen Begriffsverständnisses allerdings kaum unterstützen, insbesondere zum Problem der Beurteilung im Einzelfall bzw. zum Problem von unangemessenen Primärintuitionen wird kein Beitrag geleistet.

Es gilt also, adäquate Vorstellungen zum Begriff „Zufall" durch Konfrontation mit bzw. Bearbeitung von verschiedenen Situationen, in denen der Begriff Zufall eine Rolle spielt, aufzubauen.

Dazu sollten einerseits reale oder zumindest realitätsnahe Situationen aufgegriffen und analysiert werden, andererseits aber auch das Potential der Auseinandersetzung mit künstlichen stochastischen Situationen, beispielsweise durch eigene Aktivitäten mit Zufallsexperimenten, ausgenutzt werden.

Im Folgenden werden konkrete Aufgaben, die diesem Anspruch gerecht werden, für den Unterricht vorgestellt.

In den ersten beiden geht es um die Erhebung von bzw. die Arbeit mit Datenmaterial, was einen hohen Realitätsbezug sichert.

Aufgabe 1:

Umfrage zur Akzeptanz des Euro als Zahlungsmittel

Fächerübergreifend mit dem Geographie- und Wirtschaftskundeunterricht wurden die Schüler/innen einer 6. Klasse AHS beauftragt herauszufinden, wie weit der Euro als Zahlungsmittel Akzeptanz in der Bevölkerung gefunden hat.

Die Schüler/innen beschlossen eine Umfrage in Zweiergruppen durchzuführen und einigten sich auf folgendes Umfragedesign.

Jede Gruppe befragt mindestens 30 Personen und gibt den Befragten drei Antwortmöglichkeiten zur Auswahl:

- Ich schätze den Euro als Zahlungsmittel.
- Ich hätte lieber noch den Schilling als Zahlungsmittel.
- Es ist mir egal.

Spätestens bei der Präsentation der Umfrageergebnisse, die in den einzelnen Gruppen für die Schüler/innen überraschend unterschiedlich waren, drängte sich die Notwendigkeit auf, die Umfrageergebnisse zu hinterfragen. Der entscheidende Einfluss des Standortes und der Zeit der Umfrage führte zu der Frage: Wann darf man Befragte als „zufällig" ausgewählt bezeichnen?

Determinieren Standort- und Zeitwahl das Umfrageergebnis nicht (zumindest teilweise) a priori?

Ist es nicht viel „wahrscheinlicher" eine hohe Zustimmung zum Euro als Ergebnis zu erhalten, wenn man beispielsweise zu Geschäftszeiten den Standort Kärntnerstraße im Zentrum von Wien anstelle des Sonntagvormittags nach der Kirche wählt? Und was ist in diesem Zusammenhang mit dem Begriff „wahrscheinlich" gemeint?

In solchen Diskussionsphasen kommt es zu einer Auseinandersetzung mit diesen beiden wesentlichen Begriffen der Stochastik auf intuitiver Ebene im besten Sinn, die passenden Aspekte werden von Lernenden selbst ins Spiel gebracht: „Wahrscheinlichkeit" als Vorhersage für relative Häufigkeit, der Begriff „Zufall" und seine Tauglichkeit für Situationsbeschreibungen, in denen durch eine bestimmte Vorauswahl (z. B. Zeit und Ort der Befragung) Ergebnisse beeinflusst werden.

Überdies geht es natürlich auch um ein erklärtes Lehrplanziel, nämlich den kritischen Umgang mit Umfrageergebnissen aller Art.

Gerade dieses Ziel lässt sich lehrplankonform auch schon in der Sekundarstufe I in Angriff nehmen. Insbesondere wird dabei auch den didaktischen Grundsätzen des Lehrplans Mathematik für die AHS-Unterstufe entsprochen, wie der folgende Auszug daraus zeigt:

„Die Schülerinnen und Schüler sind nicht Konsumierende eines fix vorgegebenen Wissens, sondern Produzierende ihres Wissens, mit Betonung auf aktives Erarbeiten, Erforschen, Darstellen, Reflektieren. Mathematische Begriffe und Verfahren werden durch die eigenen Aktivitäten von den Schülerinnen und Schülern in ihr Wissenssystem eingebaut."

Aufgabe 2:

Die folgende Aufgabenstellung stammt aus dem Schulbuch MatheFit 2 für die 2. Klasse AHS bzw. HS (HANISCH et al 2009, S. 266):

Gruppenarbeit „Mülltrennung"

Bildet Gruppen zu 4 bis 6 Personen und führt in eurem Verwandten- bzw. Bekanntenkreis eine Umfrage zum Thema „Nehmen Sie beim Wegwerfen von Abfällen auf die Mülltrennung Rücksicht?" durch.

Gebt 5 Antwortmöglichkeiten vor:

Immer – meistens – mal so mal so – kaum – nie

Jede/r von euch sollte 5 bis 10 Personen befragen.

Fügt die Ergebnisse zusammen und stellt das Gesamtergebnis der Umfrage in einer Tabelle dar!

Stellt das Umfrageergebnis grafisch sowohl durch ein Balkendiagramm als auch ein Kreisdiagramm dar!

Ihrer Entwicklungsstufe entsprechend haben Lernende dieser Alterstufe häufig das Bedürfnis mehr über ihre Umfragemodalitäten preiszugeben als es die Aufgabenstellung einfordert. Diesem Anliegen sollte unbedingt Raum gegeben werden. Denn die engagierten Schilderungen der Schüler/innen „wer wann wen befragt hat“ sind nur bei sehr oberflächlicher Betrachtung ein überflüssiges Geplänkel. Gerade sie können hervorragend beitragen, das Zustandekommen von Umfrageergebnissen unter dem Einfluss des „Zufalls“ im Zusammenspiel mit anderen Faktoren aufzudecken und damit die Bedeutung des Zufalls für Erhebungen generell in den Vordergrund zu rücken.

3. Wahrscheinlichkeit und Zufall – untrennbar miteinander verbunden

Die beiden vorgestellten Beispiele zeigen, dass bei Diskussion zu Aufgabenstellungen, die der Statistik zuzuordnen sind, automatisch der Begriff „wahrscheinlich“ Einzug hält. Über den Einfluss des Zufalls bzw. das Konzept Zufall lässt sich ohne die Verwendung eines Wahrscheinlichkeitsbegriffes nicht fundiert sprechen. Daher muss es darum gehen, „Wahrscheinlichkeit“ angemessen zur Modellierung des Zufalls verwenden zu können.
In diesem Sinn möchte ich im Folgenden auf diesen zweiten Grundbegriff der Stochastik eingehen, bevor im Anschluss daran weitere Möglichkeiten vorgestellt werden, adäquate Grundvorstellungen zu den beiden untrennbaren Begriffen aufzubauen.

3.1 Welche Wahrscheinlichkeitsbegriffe braucht der Schulunterricht?

Der Blick in den Lehrplan zeigt unmissverständlich, dass die Vermittlung eines Wahrscheinlichkeitsbegriffes, der nur den Zugang der Laplace-Wahrscheinlichkeit umfasst, unzureichend ist. Die Ausführungen in Abschnitt 1 zum Themenbereich Hypothesentesten unterstreichen das exemplarisch, zeigen sie doch dadurch vorprogrammierte Schwierigkeiten im Lernprozess auf. Bei der Arbeit mit Datenmaterial, wie in den Aufgaben 1 und 2 ist eine Verbindung zwischen „Wahrscheinlichkeit“ und relativen Häufigkeiten unerlässlich.
Für einen erfolgreichen Stochastikunterricht in der Sekundarstufe II müssen unbedingt folgende Wahrscheinlichkeitsbegriffe erarbeitet werden:

- empirische Sichtweise → frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- theoretische Sichtweise → Laplace-Wahrscheinlichkeit
- subjektive Sicht → subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff

Der geometrische Wahrscheinlichkeitsbegriff wird für den schulischen Stochastikunterricht nicht als unabdingbar betrachtet, wiewohl er stellenweise gute Erklärungsbeiträge liefern kann. Überdies kann er im Schulunterricht als Erweiterung der Laplace-Wahrscheinlichkeit angesehen werden, bei dem Quotienten von Flächen oder Volumina gebildet werden, und ist deshalb nicht eigens angeführt.
Die axiomatische Festlegung ist für den Schulunterricht, in dem es vordergründig immer um das Erfassen der Kernideen gehen muss, entbehrlich.

3.2 Eigene Aktivitäten mit Zufallsexperimenten durchführen – Zugang zu „Wahrscheinlichkeit“ und „Zufall“

Klassische Zufallsexperimente wie Würfeln mit einem normalen Würfel, das Werfen einer Münze oder das Ziehen aus einem Behälter (mit Zurücklegen) dienen vor allem dazu, die Aufmerksamkeit der Lernenden vom Einzelergebnis auf die langfristigen Ergebnisse zu verlagern. Die einfache Durchführbarkeit und Erfassbarkeit dieser Experimente rechtfertigen ihren hohen Stellenwert im stochastischen Anfangsunterricht. Aufgrund ihrer Struktur rückt bei der Durchführung dieser Experimente unwillkürlich der Laplace’sche

Wahrscheinlichkeitsbegriff ins Zentrum der Überlegungen. Sie eignen sich daher, die theoretische Sichtweise und damit den Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu entwickeln, aber insbesondere auch über ihre wiederholte Durchführung und die Dokumentation der Ergebnisse, die Verbindung zur empirischen Sichtweise und damit dem frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu schaffen.

Soll der Fokus allerdings in erster Linie auf den frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff gelegt werden, muss mit Experimenten gearbeitet werden, deren Ergebnis nicht (einfach) theoretisch vorhersagbar ist. In der folgenden Aufgabenstellung wird eine (ähnlich leicht durchführbare) Möglichkeit dazu vorgestellt.

Aufgabe 3:
Fertigt für eure Klasse gleichartige Legostein-Würfel, ähnlich jenem in Abbildung 2, an! Die Summe der Augenzahlen gegenüberliegender Seiten soll 7 ergeben.
Jede/r von euch würfelt mit diesem Legostein 30 Mal und hält seine Wurfergebnisse in einer Tabelle fest. Vergleicht eure Ergebnisse!

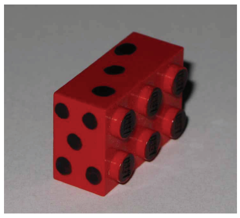

Abbildung 2: Legostein-Würfel

Aus der Dokumentation von Versuchsergebnissen der gesamten Lerngruppe und der Ermittlung der zugehörigen relativen Häufigkeiten lässt sich das empirische Gesetz der großen Zahlen erarbeiten: Mit wachsender Anzahl von Versuchen stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten eines beobachteten Ereignisses. Darauf aufbauend kann „Wahrscheinlichkeit" zur Vorhersage von relativen Häufigkeiten aufgrund von Erfahrungswerten entwickelt werden und somit auch als Instrument zur Erfassung des Zufalls verwendet werden.

Diese Sichtweise lässt sich auch anhand realitätsnaher Problemstellungen bereits in der Sekundarstufe I in den Lernprozess aufnehmen. Unter dem Abschnittstitel „Prognosen auf Basis relativer Häufigkeiten" wird in HANISCH et al 2009, S. 270 folgende Aufgabe für Schüler/innen der 6. Jahrgangsstufe gestellt:

Aufgabe 4:
Bei einer Laufveranstaltung starten die jugendlichen Teilnehmer/innen in den Kategorien „Jogger", „Runner" und „Racer". Einen Monat vor der Laufveranstaltung haben sich 250 „Jogger", 665 „Runner" und 344 „Racer" angemeldet.
Mit wie vielen Läuferinnen und Läufern in den einzelnen Kategorien muss das Organisationsteam rechnen, wenn es hofft, dass am Veranstaltungstag insgesamt 5000 Teilnehmer/innen am Start sein werden und die bereits eingegangenen Anmeldungen als Grundlage herangezogen werden?

Bei der Bearbeitung sollte unbedingt die Vorgangsweise, die bereits eingegangenen Anmeldungen als Grundlage heranzuziehen, eigens thematisiert werden. Unter welchen Bedingungen ist es sinnvoll, dass Veranstalter so ihre Schätzungen treffen? Welche Probleme kann ein solches Vorgehen mit sich bringen? Wesentliche Ideen der Hochrechnung werden damit altersadäquat behandelt, um intuitives Verständnis für den praxisrelevanten Bereich der Hochrechnung aufzubauen.

3.3 Wozu subjektive Wahrscheinlichkeit im schulischen Stochastikunterricht?

Eine besondere Herausforderung stellt wohl der Umgang mit subjektiver Wahrscheinlichkeit im Schulunterricht dar. Ist man doch im Mathematikunterricht über viele Strecken hinweg bemüht, den Charakter der Mathematik als Fachwissenschaft herauszustreichen und mit rationaler Distanz an Probleme heranzugehen. Nun aber sollen subjektive Informationen aufgenommen werden und sogar in Berechnungen einfließen. Die Relevanz subjektiver Wahrscheinlichkeit in vielen Berufsfeldern aber auch im Bereich politischer Entscheidungen erfordert ihre Behandlung im Schulunterricht. Man denke beispielsweise an die Kreditvergabe, durchaus auch auf internationaler Ebene, beispielsweise durch den IWF[1] oder die Weltbank. Gerade wenn es um große Summen zur Ankurbelung neuer Projekte geht, fließen neben wirtschaftlichen Kennziffern immer auch Einschätzungen von Expert/innen in Form informeller Informationen ein, um über die Kreditwürdigkeit von Wirtschaftstreibenden oder eines Landes zu entscheiden.

Versuchsanordnungen wie in der Aufgabe 5 dienen dazu, Lernende durch Eigenerfahrung mit subjektiver Wahrscheinlichkeit zu konfrontieren und so einen Zugang auf intuitiver Ebene zu ermöglichen. Die Aufgabe ist in ihrer Grundidee dem deutschen Schulbuch „Fokus Mathematik" für Gymnasien entnommen (Lütticken und Uhl, 2007, S. 164). In diesem Schulbuch werden lehrplangemäß 28 Seiten dem Wahrscheinlichkeitsbegriff gewidmet, das bereits in der 4. Klasse Gymnasium. Der späte Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung erst in der 6. Klasse AHS in Österreich steht also nicht nur in Diskrepanz zu den Forderungen in der fachdidaktischen Literatur. (Vergleiche mit Seite 3 dieses Artikels.)

Aufgabe 5:

Wie gut triffst du?

Führt ein Wurfexperiment mit einer Versuchsanordnung wie in der Abbildung 3 durch! Einigt euch zuvor auf die Entfernung des Korbes!

a) Jede/r schätzt zuerst, wie viele von 10 Würfen sie/er treffen wird. Überprüft dann experimentell!

b) Schätzt wieder zuerst:
Wie groß muss die Entfernung des Korbes sein, damit du in der Hälfte der Fälle triffst?
Überprüft im Anschluss experimentell!

Abbildung 3: Versuchs-anordnung zu Aufgabe 5

Die Aufgabe kann idealerweise fächerübergreifend mit dem Sportunterricht adaptiert werden. Ob Korbwürfe beim Basketball, Torschüsse beim Handball oder anderes, gelingen soll der Brückenschlag zwischen subjektiver Einschätzung und absoluter bzw. relativer Häufigkeit, um den Wahrscheinlichkeitsbegriff aus unterschiedlichen Blickwinkeln zu beleuchten. Gegenseitig positive Impulse der beiden Fächer können genutzt werden, um auch im weiterführenden Stochastikunterricht immer wieder auf eigene Ergebnisse der Schüler/innen aus dem Sportunterricht zurückgreifen zu können und damit authentisches Datenmaterial mit direktem Bezug zu den Lernenden einsetzen zu können.

4. Würfelexperiment einmal anders

In diesem Abschnitt wird eine im Vergleich zu den bisherigen umfangreichere Problemstellung vorgestellt, in der die Bedeutung bzw. Entwicklung der drei wesentlichen Begriffe Zufall, Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert im Zentrum steht. Unterschiedliche Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes kommen dabei zum Tragen, die Gegenüberstellung von experimentellen und theoretischen Ergebnissen führt zu einer Auseinandersetzung mit dem Zufallsbegriff. Die theoretische Lösung des Problems führt in natürlicher Weise zu einer Vorstufe des Erwartungswertes, dessen Ermittlung im Gedankengang jener des Erwartungswertes einer diskreten Zufallsvariable entspricht. Damit wird für diesen Begriff auf

[1] IWF: Internationaler Währungsfond

einfachem Niveau mit spielerischem Hintergrund ein guter Beitrag zu adäquater Grundvorstellung geleistet.

4.1 Die Problemstellung – das Spiel:

Jede/r von euch wählt eine Zahl von 2 bis 12.
Ihr würfelt abwechselnd mit zwei Würfeln und addiert nach jedem Wurf die Augenzahlen.
Ist die Summe der Augenzahlen genau gleich der gewählten Zahl, erhält der/die Spieler/in diese Summe als Punkte gutgeschrieben.
Weicht die Summe der Augenzahlen um 1 von der gewählten Zahl ab, erhält man eine um 1 kleinere Zahl als die Summe der Augenzahlen gutgeschrieben.
Wer zuerst mindestens 30 erreicht, hat gewonnen. Welche Zahl sollte man wählen?

Bemerkung:
Die Problemstellung kann auch im fortgeschrittenen Stochastikunterricht in dieser Form den Schüler/innen zur selbständigen Bearbeitung gestellt werden. Welche Aspekte in der Bearbeitung, in der Argumentation und in der Interpretation Berücksichtigung durch die Lernenden finden, gibt Aufschluss in welchem Maß Kompetenzen und Wissen gesichert vorhanden sind. Erfahrungsgemäß wird diese Problemstellung von Lernenden (die bereits Stochastikunterricht hatten) nicht als „leicht" eingestuft. Einmal mehr zeigt sich, dass die Notwendigkeit angemessener Grundvorstellungen ein schwierigkeitsgenerierendes Aufgabenmerkmal ist.

4.2 Spielen – Analysieren – Interpretieren – und auch Rechnen

Dem Leitgedanken dieses Aufsatzes folgend, wird das Problem nun aber verwendet, für die oben angesprochenen Grundbegriffe adäquate Grundvorstellungen, insbesondere auch auf intuitiver Ebene, aufzubauen.
Dazu wird zunächst über den folgenden Arbeitsauftrag eine Spielphase angeregt.

Auftrag 1:
Spielt das Spiel und probiert mehrere Zahlen aus!

Die folgende Tabelle zeigt Spielergebnisse einer Gruppe, die im Kurs „MatheFans an die Uni"[2] an der Universität Wien erhoben wurden.

Zahl	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
so oft gewählt:	2x	-	2x	6x	9x	18x	14x	10x	8x	3x	4x
so oft damit gewonnen:	-	-	1x	1x	5x	9x	9x	6x	4x	2x	-

Tabelle 1: Spielergebnisse zu „Würfelexperiment einmal anders"

Die Analyse der Spielergebnisse festigt die während der Spielphase entstandenen Erkenntnisse über die entscheidenden Einflussfaktoren für die Güte einer Zahl in diesem Spiel. Je nach Altersstufe wird man sich mit einer mehr oder weniger exakten Formulierung dieser Einflussfaktoren zufrieden geben. Selbst saloppe Erklärungen, die nur Teilaspekte ansprechen, wie „Mit 2 und 3 ist man völlig chancenlos, die kommen ja nie", bieten gute Ansatzpunkte. Mit Hilfe der eigenen Spielerfahrungen schaffen es viele Lernende die beiden wesentlichen

[2] Der Kurs „MatheFans an die Uni" wird semesterweise für interessierte Schüler/innen der AHS-Unterstufe an der Fakultät für Mathematik durchgeführt. Nähere Informationen dazu siehe unter http://rfdzmathematik.univie.ac.at/

Einflussfaktoren selbst zu erkennen: „Es kommt darauf an, ob ich meine Zahl leicht würfeln kann und ob sie viele Punkte bringt“, ist, wie auch die oben genannte Aussage, ein Originalzitat eines Schülers.

Um diese Einsichten zu fördern, eigenen sich Fragestellungen wie:
Was sagst du zu folgenden Überlegungen?
Ich wähle 12. Das ist die größte Zahl und ich bekomme am meisten Punkte!
Ich wähle 11. Denn da bekomme ich nicht nur Punkte mit 11 und 12, sondern auch mit 10!

Bereits an dieser Stelle soll es auch darum gehen, den Einfluss des Zufalls auf intuitivem Niveau in die Diskussion einfließen zu lassen. In der vorliegenden Tabelle 1 eignet sich dafür insbesondere das Ergebnis für die Zahl 11, das für diese Spielrunde relativ gesehen am besten ist.

In einer anschließenden Phase muss es darum gehen, die Problemstellung und Einflussfaktoren zu präzisieren. Was heißt überhaupt, eine Zahl sei „leicht zu würfeln“?
Die nächsten beiden Aufträge peilen zwei unterschiedliche Sichtweisen an.
Auftrag 2 fordert zum Auszählen von absoluten Häufigkeiten auf und zielt damit letztlich darauf ab, zur Klärung der Frage mit Hilfe des frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes beizutragen. Auftrag 3 hingegen strebt eine Klärung über den theoretischen Ansatz an.

Auftrag 2:
Welche Augensumme kommt bei euren Würfen (1) am häufigsten (2) am seltensten vor?
Probiert aus, indem jede/r zehnmal würfelt und ihr eure Ergebnisse in der Tabelle 2 zusammenfasst!

Augensumme	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
so oft gewürfelt:											

Tabelle 2: Absolute Häufigkeiten beim Würfeln mit zwei Würfeln

Auftrag 3:
In der Tabelle stehen in der Kopfspalte und in der Randspalte die Augenzahlen, die jeweils ein Würfel erzielt hat. Trage in die anderen Felder der Tabelle jeweils die Augensumme der beiden Würfel ein!
Entnimm aus Tabelle 3: Wie of kommen die einzelnen Summen der Augenzahlen vor? Trage die Ergebnisse in Tabelle 4 ein!

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabelle 3: Summe der Augenzahlen beim Würfeln mit zwei Würfeln

Augensumme	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
theoretische Anzahl bei 36 Würfen	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tabelle 4: Auszählung der Tabelle 3: Anzahl der einzelnen Summen der Augenzahlen bei 36 Würfen

Mit Hilfe von Tabelle 4 lässt sich eine Vorausberechnung motivieren, welche Punktezahl für eine gewählte Zahl bei 36 Würfen „theoretisch zu erwarten“ ist:
Welche Punktezahl kann man z. B. bei der Wahl der Zahl 7 erwarten?
Die Augensumme 7 kommt insgesamt sechs Mal vor, daraus ergeben sich $6 \cdot 7 = 42$ Punkte.
Die Augensumme 6 kommt fünf Mal vor und da 6 um 1 kleiner ist als 7,
werden nur 5 Punkte gutgeschrieben, ergibt also $5 \cdot 5 = 25$ Punkte.
Die Augensumme 8 kommt fünf Mal vor, man bekommt jeweils 7 Punkte gutgeschrieben, das ergibt also $5 \cdot 7 = 35$ Punkte.
Zusammen sind das bei Wahl der Zahl 7 voraussichtlich $6 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 7 = 102$ Punkte (bei 36 Würfen).

Der Aufbau des erwarteten Wertes spiegelt die beiden Einflussfaktoren für die Güte einer Zahl in diesem Spiel wider: Jeder Summand setzt sich aus den Faktoren „theoretische Anzahl des Ereignisses (bei 36 Würfen)“ und „Wert des Ereignisses“ zusammen. Für die Lernenden muss die Übereinstimmung mit ihren Erkenntnissen aus der Spielphase – „Es kommt darauf an, ob ich meine Zahl leicht würfeln kann und ob sie viele Punkte bringt.“ – klar ersichtlich sein. Erst dann ist die Verbindung von intuitivem Wissen und theoretischen Überlegungen gelungen und ein essentieller Beitrag zum Aufbau adäquater Grundvorstellungen geleistet.
Überdies wird dabei auch für den Begriff des Erwartungswertes für diskrete Zufallsvariablen in bestem Sinne, also fernab von jedem Vorratslernen, eine gute Grundlage geschaffen, denn die Idee und Berechnungsweise der erwarteten Punktezahl entspricht genau jener des Erwartungswertes für diskrete Zufallsvariablen.

Für die anderen zur Wahl stehenden Zahlen analog durchgeführte Berechnungen ergeben die in Tabelle 5 zusammengefassten Ergebnisse.

gewählte Zahl:	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
vorausberechnete Punktezahl:	6	16	32	54	82	102	108	98	82	60	32

Tabelle 5: Vorausberechnete Punktezahlen für die zu Spielbeginn gewählte Zahl bei 36 Würfen

Die theoretischen Überlegungen zur Aufgabenstellung münden also in der Empfehlung die Zahl 8 zu wählen. Dieses Ergebnis sollte Schüler/innen entsprechend der oben gestellten Forderung nach Verbindung zwischen Berechnungsidee und intuitiven Einsichten nicht überraschen.

Wie passt dieses theoretische Ergebnis mit den experimentellen Ergebnissen zusammen?
Diese Frage kann auf Basis des Vergleichs von Tabelle 5 mit den Spielergebnissen in Tabelle 1 beantwortet werden. Sowohl Zahlen (Augensummen), die im theoretischen Ergebnis und im experimentellen Ergebnis vergleichbar abschneiden, als auch solche bei denen eine Diskrepanz aufscheint, müssen herangezogen werden, um die Rolle des Zufalls beispielhaft zu analysieren. Wesentlich dabei ist, in die Überlegungen aufzunehmen, dass ein Spielergebnis noch viel mehr bzw. weniger vom theoretischen Ergebnis abweichen könnte. Dass also die Stärke des theoretischen Ansatzes, nämlich sein eindeutiges Ergebnis, in gewisser Hinsicht gleichzeitig eine Schwäche ist, weil er eben den Zufall nicht erfassen kann (und natürlich auch nicht will).
Für seine Eignung als Instrument zur Vorhersage von (experimentellen) Ergebnissen sind weiterführende Überlegungen erforderlich. Wesentlich ist hier, den Kern herauszuarbeiten, dass die Güte der Vorhersage durch die vorausberechneten Punktezahlen mit steigender Anzahl an Spielen wächst und damit auch für das empirische Gesetz der großen Zahlen eine intuitive Grundlage zu schaffen.

4.3 Zusammenfassung

Tabelle 6 gibt eine zusammenfassende Übersicht, in welcher Form das vorgestellte Spiel angemessene Grundvorstellungen fördert.

Schüler-Aktivität	Beitrag zum Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen
Experimentelle Durchführung des Spiels	Erfahrungen zum Begriff Zufall
Mehrmalige Entscheidung für eine Zahl	Auseinandersetzen mit „Wahrscheinlichkeit“. Welcher Wahrscheinlichkeitsbegriff ist hier passend bzw. nützlich? Erkennen, dass subjektive Wahrscheinlichkeit unpassend ist.
Vorausberechnung	Verbindung von intuitiven Einsichten mit theoretischen Überlegungen. Den Aufbau des erwarteten Werts erfassen. Vorbereitung des Erwartungswertes für diskrete Zufallsvariablen.
Analyse: Theoretisches Ergebnis versus experimentelles Ergebnis	Die Rolle des Zufalls beschreiben können. Die Eignung der vorausberechneten Punktezahlen zur Vorhersage einschätzen können. Für das empirische Gesetz der großen Zahlen eine sichere intuitive Grundlage schaffen.

Tabelle 6: Spiel „Würfelexperiment einmal anders“: Beiträge zu angemessenen Grundvorstellungen

4.4 Anwendungsrelevanz

Gut erfasste Grundideen eines Konzeptes bieten im Mathematikunterricht (nahezu) immer die Gelegenheit Anwendungsrelevanz aufzuzeigen. Im konkreten Fall können die geführten Vorausberechnungen herangezogen werden, um die Grundidee der Berechnung von Versicherungsprämien zu thematisieren.
Beispiel Sturmschaden:
Eine Versicherung weiß aus langjährigen Aufzeichnungen, dass ungefähr 400 von 10 000 Versicherten innerhalb eines Jahres einen Sturmschaden melden. Die Kosten eines solchen Schadens betragen im Schnitt 3000 €.
Der Versicherung erwachsen bei 10 000 Versicherten in einem Jahr daher durchschnittlich Gesamtkosten für Sturmschadensfälle in der Höhe von 1 200 000 €.
Daher ist ein erster Mindestrichtwert für die Prämie, die für eine Sturmschadenversicherung bezahlt werden muss, 120 €.
Für die Festlegung der endgültigen Prämie müssen natürlich noch andere Posten, wie Nebenkosten und Gewinn der Versicherung, ins Kalkül gezogen werden.

Die Grundidee ist hier einfach dargestellt, die Berechnung leicht nachvollziehbar. Es bleibt viel Raum, um Fragen wie die folgenden zu thematisieren:
Was ist mit „langjährigen“ Aufzeichnungen gemeint?
Wie soll die Versicherung mit einem sprunghaften Ansteigen von Schadenskosten umgehen? Wann kommt es überhaupt dazu?
Fragen, die neben einer Konfrontation mit Zufall und Wahrscheinlichkeit auf Basis von Häufigkeiten (vergleiche mit den Ausführungen zu den Aufgaben 3 und 4 im Abschnitt 3.2) in realem Sinnzusammenhang auch zu der Frage nach den Grenzen der Aussagekraft von Vorausberechnungen führen. Denn gerade im Fall von Sturmschäden, die in den letzten Jahren

bekanntlich kontinuierlich im Ansteigen waren, ist es fraglich, inwieweit Aufzeichnungen für die Vorausberechnungen der Prämien tauglich sind, also Prognosen auf Basis von Häufigkeiten brauchbar sind.

5. Abschließende Bemerkungen – Zusammenfassung

Die Annahme, dass ein formal sauberer Umgang mit Begriffen durch die Lehrenden, irgendwann auch bei den Lernenden automatisch zu einem angemessenen Verständnis führt, hat vermutlich bei Begriffen wie Dreieck, gerade Zahl, also solche, die sich kurz definieren lassen, ihre Berechtigung. In anderen Fällen muss sie versagen, erst recht bei Begriffen, die sich gar nicht definieren lassen und/oder unterschiedliche Aspekte in sich vereinen. In der Stochastik betrifft das gerade (auch) die grundlegenden Begriffe des gesamten Gebietes – Zufall und Wahrscheinlichkeit.
Daher bedarf es im Stochastikunterricht – und das insbesondere in der Anfangsphase – eines besonderen Engagements angemessene Grundvorstellungen aufzubauen. Das muss sich in der Zeiteinteilung und Wertigkeit im Unterricht widerspiegeln.
Ein Stochastikunterricht, in dessen Anfangsphase dem Abtasten von Primärintuitionen und (gegebenenfalls) Aufbau von angemessenen Sekundärintuitionen kein Platz gegeben wird, benachteiligt Lernende im Erfassen von stochastischen Konzepten und Methoden, macht es ihnen stellenweise sogar unmöglich.
Viele gängige österreichische Schulbücher für die 6. Klasse AHS suggerieren durch entsprechende Seitenzuteilung, sich möglichst wenig mit dem Erfassen der elementaren Konzepte zu Zufall und Wahrscheinlichkeit aufzuhalten, und möglichst bald, möglichst viele Aufgaben zu bearbeiten, in denen mit Hilfe des „Günstige durch Mögliche“-Ansatzes Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden. Der Begriff Wahrscheinlichkeit wird damit einseitig besetzt, der Begriff Zufall wenig bis gar nicht thematisiert. Oft finden auch im weiteren Stochastikunterricht der 7. und 8. Klasse andere Ansätze kaum Berücksichtigung. Sich daraus ergebende Defizite können durch Betonung von kalkülhaften Passagen bis zu einem gewissen Grad versteckt werden, steigen aber sofort an die Oberfläche, wenn es darum geht, stochastische Situationen, die sich nicht dem Laplace-Ansatz unterordnen lassen, zu erkennen oder gar zu deuten. Und das sollte doch ein erklärtes Ziel jedes Stochastikunterrichts sein!

Die Begriffe Wahrscheinlichkeit und Zufall in der 6. Klasse erstmals zu thematisieren – die Wörter „Wahrscheinlichkeit“ und „Zufall“ kommen im österreichischen Unterstufenlehrplan explizit nicht vor – bringt insofern Schwierigkeiten mit sich, als bis dahin Schüler/innen Intuitionen zu den beiden Begriffen entwickelt haben. Untaugliche Intuitionen halten sich umso hartnäckiger, je länger sie nicht mit angemessenen Vorstellungen konfrontiert werden und sind mit fortgeschrittenem Alter der Lernenden umso schwieriger abzulösen. Das geht sowohl aus der fachdidaktischen Literatur als auch aus Unterrichtserfahrungen ganz klar hervor und hat beispielsweise in deutschen Lehrplänen Berücksichtigung gefunden. Wahrscheinlichkeit und Zufall sind dort in der Sekundarstufe I am Plan.
Es steht aber keineswegs im Widerspruch zum österreichischen Unterstufen-Lehrplan im Rahmen des Statistikunterrichts, der für alle vier Jahrgangsstufen vorgesehen ist, Aspekte von Zufall und Wahrscheinlichkeit auf unterschiedlichen Ebenen aufzugreifen und damit auch so manchem Problem des Stochastikunterrichts in der Sekundarstufe II zuvorzukommen.
Der Umgang mit anderen elementaren Begriffen der Mathematik zeigt es vor:
Kein/e Lehrer/in würde erwarten, dass ein Begriff wie „Funktion“ in wenigen Stunden erarbeitet werden kann. Funktionale Abhängigkeiten werden die gesamte Sekundarstufe I hindurch immer wieder in unterschiedlichen Zusammenhängen behandelt, bis in der vierten Klasse zunächst die lineare Funktion definiert und in der fünften Klasse ein allgemein gültiger Funktionsbegriff festgelegt wird.

Die in diesem Aufsatz vorgeschlagenen Möglichkeiten wollen auch den Begriffen Wahrscheinlichkeit und Zufall ein ähnliches Recht einräumen und dienen dem nachhaltigen Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen. Es zahlt sich aus, in der Sekundarstufe I damit zu beginnen. Der Aufsatz konnte hoffentlich überzeugen, dass das keineswegs nur eine subjektive Einschätzung ist.

Literatur:

BORNELEIT P., DANCKWERTS R., HENN, H.-W., WEIGAND, H.-G. (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: JMD 22 (2001), Heft 1, S. 73 - 90

BÜCHTER A., HENN H. W. (2005): Elementare Stochastik. Springer Verlag. Heidelberg.

GÖTZ S. u. H.-C. REICHEL, Hrsg. (2007): Mathematik Lehrbuch 8. öbv&hpt Verlagsgesellschaft. Wien

HANISCH, G., BENISCHEK, I., HAUER-TYPPELT, P., SATTLBERGER,E. (2009): MatheFit2. Wien, Verlag Besseres Buch.

HAUER-TYPPELT, P. (2007): Unbedingt „Bedingte Wahrscheinlichkeit" ? Der Satz von Bayes im Schulunterricht. In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 39 (2007) S. 54-65

KÜTTING, H. SAUER, M. (2008): Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg.

LÜTTICKEN R., UHL C. (2007): Fokus Mathematik. Gymnasium Band 4. Cornelsen Verlag. Berlin.

TIETZE U.-P., KLIKA M., WOLPERS H. (2002): Didaktik der Stochastik. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 3. Vieweg Verlag. Braunschweig/Wiesbaden.

Internetquelle:
Lehrplan AHS-Untersufe und AHS Oberstufe
http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp
letztes Abfragedatum: 12.10.2009

Anschrift der Autorin:

Dr. Petra Hauer-Typpelt

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Nordbergstraße 15
1090 Wien
und
Gymnasium Kundmanngasse
Kundmanngasse 20-22
1030 Wien

petra.hauer-typppelt@univie.ac.at